



CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „PETRU MAIOR”
Colegiul „Petru Maior” Reghin
EDIȚIA a II-a, 9.04.2022

Clasa a XII-a

Filiera tehnologică, profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Calculați media geometrică a numerelor $x = \log_6 8 + \log_6 27$ și $y = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 + 6^2}$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + a$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2-x^2} = 7^{2x-1}$. |
| 5p | 4. Arătați că produsul numerelor A_5^2 , C_6^2 și A_4^2 este pătratul unui număr natural. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, a+1)$, $B(2, -3)$ și $C(3, 1-a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A , B și C sunt coliniare. |
| 5p | 6. Determinați raza cercului înscris în triunghiul MNP , dreptunghic în N , știind că $MN = 12$ și $NP = 16$. |

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

- | | |
|--|--|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(1, 0)) = 0$. |
| 5p | b) Demonstrați că, dacă $a \in (-\infty, 0)$ și $b \in (0, +\infty)$, atunci matricea $A(a, b)$ este inversabilă. |
| 5p | c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1, 3) \cdot X = A(2, 1)$. |
| 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$. | |
| 5p | a) Arătați că $1 \circ (-1) = -\frac{7}{3}$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x \circ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Calculați $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$. |

-
1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x - 5 \ln x + 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(6x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{xf'(x)} = \frac{1}{2}$.
- 5p c) Demonstrați că $3x^2 - x - 2 \geq \ln(x^5)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^2 (x+2)f(x)dx = 6$.
- 5p b) Calculați $\int_0^4 \left(f(x) - \frac{x^2}{x+2} \right) dx$.
- 5p c) Determinați numărul natural n , știind că $\int_0^6 (x^2 - 9)f(x+1)dx = n^2$.